N 1

RECHERCHES

SUR

L'HISTOIRE DES SCIENCES MATHÉMATIQUES

CHEZ LES ORIENTAUX,

D'APRÈS DES TRAITÉS INÉDITS ARABES ET PERSANS.

EXTRAIT N° 2 DE L'ANNÉE 1860
DU JOURNAL ASIATIQUE.

RECHERCHES

SUR

L'HISTOIRE DES SCIENCES MATHÉMATIQUES

CHEZ LES ORIENTAUX,

D'APRÈS DES TRAITÉS INÉDITS ARABES ET PERSANS,

PAR M. F. WOEPCKE.

PARIS.

IMPRIMERIE IMPÉRIALE.

M DCCC LX.

RECHERCHES

SUR

L'HISTOIRE DES SCIENCES MATHÉMATIQUES

CHEZ LES ORIENTAUX,

D'APRÈS DES TRAITÉS INÉDITS ARABES ET PERSANS.

TROISIÈME ARTICLE[1].

SUR UNE MESURE DE LA CIRCONFÉRENCE DU CERCLE, DUE AUX ASTRONOMES ARABES, ET FONDÉE SUR UN CALCUL D'ABOÛL WAFÂ.

J'ai remarqué le passage dont la traduction et la discussion feront l'objet de la présente note dans un fort beau manuscrit arabe que M. Scheffer a eu la bonté de me communiquer. Je m'empresse de lui témoigner toute ma reconnaissance d'une si bienveillante libéralité.

[1] Voir le *Journal asiatique*, cahiers d'octobre-novembre 1854, p. 348 à 384; février-mars 1855, p. 218 à 256, et avril 1855, p. 309 à 359. Il faut supprimer dans le premier de ces articles, cahier d'octobre-novembre 1854, p. 360, lignes 20 et 21, les mots « d'après Casiri, etc. » jusqu'à « 26 mars 1477. »

Ce manuscrit contient une collection des traités que les astronomes arabes appelaient les *Intermédiaires*, المتوسّطات, parce que leur étude suivait celle des Éléments d'Euclide, et précédait celle de la Grande Syntaxe de Ptolémée. Ce sont :

Les Données d'Euclide, كتاب المعطيات لاقليدس

Les Sphériques de Théodose, كتاب الاكر لثاوذوسيوس.

Le livre d'Autolycus sur la Sphère en mouvement, كتاب الكرة المتحرّكة لاوطولوقس.

Les Sphériques de Menelaus, كتاب مانالاوس فى الاشكال الكريّة.

Le livre des habitations de Théodose, كتاب المساكن لثاوذوسيوس.

L'Optique d'Euclide, كتاب المناظر لاقليدس.

Les Phénomènes d'Euclide, كتاب ظاهرات الفلك لاقليدس.

Théodose. Des jours et des nuits, كتاب ثاوذوسيوس فى الايّام والليالى.

Autolycus. Des levers et couchers des étoiles, كتاب اوطولوقس فى الطلوع والغروب,

Le livre des ascensions d'Hypsiclès, كتاب ابسقلاوس فى المطالع.

Aristarque. Des grandeurs et des distances du soleil et de la lune, كتاب ارسطرخس فى جرمى النيّرين وبعديهما.

Les lemmes d'Archimède, كتاب مأخوذات ارشميدس

Le traité de la sphère et du cylindre d'Archimède, كتاب الكرة والاسطوانة لارشميدس.

La mesure du cercle d'Archimède, مقالة ارشميدس فى تكسير الدايرة.

Un traité de la composition des rapports, et des propriétés d'un triangle plan ou sphérique coupé par une transversale (traduit du persan en arabe), كتاب دعاوى الشكل المعروف بالقطاع وبراهينه.

Ces traités sont accompagnés, en partie, de commentaires. Ils sont suivis de dates de copie qui montrent que le manuscrit a été écrit à Soultâniyeh pendant la seconde moitié de l'année 722 de l'hégire; ce qui correspond à la seconde moitié de l'année 1322 de notre ère. On trouve, en outre, certaines dates relatives à l'achèvement de la rédaction des éditions dont le présent manuscrit nous offre la copie. Ces dates appartiennent aux années 651 et 653 de l'hégire (1253 et 1255 de notre ère).

On vient de voir que le Traité de la mesure du cercle d'Archimède fait partie des ouvrages contenus dans ce volume. On sait que ce traité a pour objet la détermination d'une valeur approchée du nombre qui exprime le rapport de la longueur de la circonférence d'un cercle à la longueur de son diamètre. Or, à la suite de la troisième et dernière proposition de ce traité, il y a, dans le manuscrit de M. Scheffer, un passage contenant une détermination du même nombre considérablement plus approchée que celle d'Archimède. La donnée principale sur laquelle est fondée cette détermination est attribuée à Aboûl Wafâ. J'ai inséré dans le *Journal asiatique*, il y a quelques années, l'analyse d'un ouvrage géométrique de cet auteur, et, à cette occasion, j'ai donné une notice assez étendue sur la vie et les écrits du célèbre astronome. Aboûl Wafâ mourut à Baghdâd, le 1er juillet 998 de notre ère.

L'évaluation du rapport de la circonférence au diamètre a été un des problèmes les plus célèbres de la géométrie de l'antiquité et du moyen âge, et même aujourd'hui il donne lieu à quelques-unes des plus belles applications de la théorie des intégrales définies. Si les puissants moyens de l'analyse moderne nous permettent actuellement d'atteindre dans cette évaluation à une exactitude dont il est difficile de se faire une idée, il est curieux sans doute de connaître un des degrés intermédiaires auxquels il a fallu péniblement s'élever avant de parvenir à une telle perfection.

L'importance historique de la question mathématique à laquelle se rapporte le passage arabe que je viens de signaler, la haute réputation de l'auteur qui a fourni l'élément fondamental de la solution contenue dans ce passage, la circonstance favorable que nous connaissons avec une sûreté parfaite l'époque de ce géomètre, enfin différents détails qui offrent un intérêt particulier et qui seront examinés plus loin, tout cela m'a semblé faire de ce morceau une donnée précieuse pour l'histoire des mathématiques du moyen âge.

C'est à ce titre que je le publie, en le faisant suivre d'une traduction et d'une discussion mathématique du résultat obtenu par le géomètre arabe.

J'ai étendu cette discussion au calcul original d'Aboûl Wafâ, que j'ai retrouvé dans un manuscrit de la Bibliothèque impériale.

Cet examen prouvera,

1° Que l'erreur dont est affectée la valeur de sin 30′ calculée par Aboûl Wafâ est de

$$0,000.000.001.174.292;$$

2° Que l'erreur que comporte sa formule d'interpolation est de

$$0,000.000.001.000.529;$$

3° Que la valeur du nombre π qui résulte du calcul de notre texte est affectée d'une erreur de

$$0,0000245;$$

4° Qu'il y a quelques raisons de croire que ce calcul ne doit être considéré que comme un exemple des opérations numériques auxquelles donne lieu la méthode exposée dans notre texte, et non pas comme une détermination définitive de la valeur du nombre π;

5° Que, avec les formules et les données qu'il avait à sa disposition, l'auteur de notre texte aurait pu facilement arriver à une valeur de π affectée seulement d'une erreur de

$$0,0000053;$$

6° Que toutefois la méthode suivie par l'auteur, tant qu'elle restait fondée sur le calcul d'Aboûl Wafâ, ne permettait pas de faire descendre l'erreur de la valeur de π au-dessous de

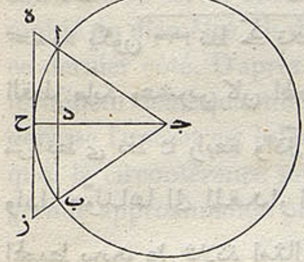
$$0,0000036.$$

Le moyen principal pour arriver aux résultats que je viens d'énoncer, et qui, je pense, permettront au lecteur de se former un jugement précis sur la valeur de la détermination arabe du nombre π, a été de séparer, par des considérations analytiques, la partie qui, dans l'erreur des résultats finaux obtenus par les auteurs arabes, provient de l'imperfection de la méthode, de la partie qui a son origine dans la défectuosité des données qu'ils emploient, et dans le degré d'inexactitude que comportent leurs calculs.

TEXTE DU PASSAGE.

اقول وللمنجّمين طريق آخر وهو انّهم يحصّلون وتر قوس صغيرة تكون جزءا من محيط الدايرة بالاصول التى تبيّنت فى كتاب المجسطى وغيره من كتبهم البرهانية ويجعلونه ضلعا من اضلاع الشكل الذى فى الدايرة وتكون نسبته الى العمود الواقع من مركز الدايرة عليه كنسبة ضلع الشكل الذى على الدايرة الشبيه به الى نصف القطر فيحصّلون ذلك الضلع ايضا ويحصّلون بحسبها المقدارين اللذين يزيد المحيط على احدهما وينقص من آخرها

فيتحصّل المحيط باقرب تقريب مثاله ليكن الدايرة اب
ومركزها ج واب منه جزء
من سبعمأية وعشرين جزءا
هى المحيط ونصل وتر اب
فيكون مقداره بحساب ابى
الوفاء البوزجانى على الاصول
المذكورة باقرب تقريب ع لا



كد نه ند نه خامسةً وهو وتر نصف درجة اذا جعل
القطر مأية وعشرين جزءا واذا جعلناه ضلع شكل ذى
سبعمأية وعشرين ضلعا فى الدايرة يكون محيط ذلك
الشكل بحسبه ٣٧٦ نط ى نط ثالثةً واذا نصّفنا وتر نصف
درجة كان مقدار اد ع يه مب كز نز كز خامسةً مربّعه
ع د و مد ب د نز كه يج ل ط عاشرة ومربّع نصف القطر
الذى هو خطّ اج ٣٦٠٠ جزء نقصنا مربّع اد منه بقى
مربّع دج ٣٥٩٩ نه نج يه نز نه ب لد ما كط نا [1] جذره
وهو خطّ دج نط نط نز نو لز نو نا سادسةً ضربنا اد فى
جح نصف القطر وقسمناه على دج خرج مقدار هح
ع يه مب كح كط مه خامسةً ضعّفناه بلغ ع لا كد نو نط

[1] Le ms. porte نا ماكط لد ب نه نز نه نج نه ٣٥٩٩, نه au lieu de يه pour les tierces.

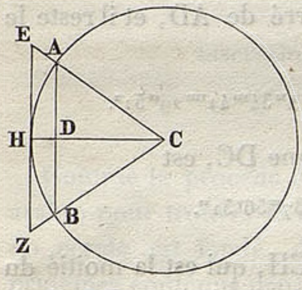
لا خامسة وهو مقدار ه‍ز وهو ضلع شكل ذى سبعمأية
وعشرين ضلعا على الدايرة شبيه بالاول ومحيط الشكل
بحسبه يكون ٣٧٦ نط كج ند يب رابعة [1] فاذن اذا جعلنا
القطر مأية وعشرين كان المحيط ٣٧٦ جزءا وكسرا اكثر
من نط ى نط ع رابعة واقلّ من نط كج ند يب رابعة
واذا حوّلناها الى المقدار الذى ذكره ارشميدس كان
المحيط يزيد على ثلاثة امثال القطر بما هو اكثر من عشرة
اجزاء من سبعين جزءا ولح ما كا ثالثة واقلّ من عشرة
اجزاء من سبعين جزءا و لز مز لز ثالثة ويكون بالتقريب
عشرة اجزاء من سبعين جزءا و لح يد كط ثالثة ۞

TRADUCTION.

« Je dis : les astronomes possèdent une autre méthode. C'est qu'ils déterminent, au moyen des principes expliqués dans le livre de l'Almageste et dans d'autres ouvrages astronomiques, où les théories sont accompagnées de démonstrations, la corde d'un petit arc égal à une certaine partie de la circonférence du cercle. Ils considèrent cette corde comme le côté d'une figure inscrite au cercle; et ce côté

[1] Le ms. porte ٣٧٦ يو نط كج ند يب خامسة, erreur de copiste évidente, ainsi qu'on le voit, soit par la répétition du même nombre, deux lignes plus loin dans le texte, soit en vérifiant le nombre par le calcul.

sera à la perpendiculaire abaissée du centre du cercle sur le même côté, comme le côté de la figure circonscrite au cercle et semblable à la première, à la moitié du diamètre. Ils déterminent donc également ce dernier côté. D'après les valeurs trouvées ils déterminent deux quantités telles que la circonférence dépasse l'une et est inférieure à l'autre, en vertu de quoi la circonférence sera déterminée avec la plus grande approximation possible.



« Soit, par exemple, le cercle AB, son centre C, et AB une partie de ce cercle, dont sept cent vingt sont égales à la circonférence. Menons la corde AB. Sa mesure sera, avec la plus grande approximation possible, d'après le calcul d'Aboûl Wafâ Alboûzdjânî, fondé sur les principes susmentionnés,

$$0^{p}\,31'\,24''\,55'''\,54^{iv}\,55^{v}.$$

Ceci est la corde de la moitié d'un degré, si l'on pose le diamètre égal à cent vingt parties. Si nous considérons cette corde comme le côté d'une figure de sept cent vingt côtés inscrite au cercle, le périmètre de cette figure sera, d'après cela,

$$376^{p}\,59'\,10''\,59'''.$$

Si ensuite nous prenons la moitié de la corde de la moitié d'un degré, la mesure de AD sera :

$$0^{p}15'42''27'''57^{iv}27^{v}.$$

Le carré de cela est :

$$0^{p}4'6''44'''2^{iv}4^{v}57^{vi}25^{vii}18^{viii}30^{ix}9^{x},$$

et le carré de la moitié du diamètre ou de la ligne AC

$$3600^{p}.$$

Nous en retranchons le carré de AD, et il reste le carré de DC :

$$3599^{p}55'53''15'''57^{iv}55^{v}2^{vi}34^{vii}41^{viii}29^{ix}51^{x}.$$

La racine de cela, ou la ligne DC, est

$$59^{p}59'57''56'''37^{iv}56^{v}51^{vi}.$$

Nous multiplions AD par CH, qui est la moitié du diamètre, et nous divisons le résultat par DC; il résulte la mesure de EH :

$$0^{p}15'42''28'''29^{iv}45^{v}.$$

Doublant cela on obtient :

$$0^{p}31'24''56'''59^{iv}31^{v}\ (\textit{sic});$$

ce qui est la mesure de EZ, c'est-à-dire du côté de la figure de sept cent vingt côtés circonscrite au cercle, et semblable à la première. Le périmètre de cette figure sera conséquemment :

$$376^{p}59'23''54'''12^{iv}.$$

« Donc, si nous posons le diamètre égal à cent vingt, la circonférence sera de 376 parties plus une fraction plus grande que $59' 10'' 59''' 0^{\text{iv}}$, et plus petite que $59' 23'' 54''' 12^{\text{iv}}$. Si nous transformons cela pour le rapporter à la mesure mentionnée par Archimède, la circonférence dépassera le triple du diamètre d'une quantité plus grande que dix soixante-dixièmes et $38' 41'' 21'''$, et plus petite que dix soixante-dixièmes et $37' 47'' 37'''$; ce sera approximativement dix soixante-dixièmes et $38' 14'' 29'''$. »

DISCUSSION DU CALCUL.

I.

Comme le procédé employé par les astronomes arabes pour trouver la mesure de la circonférence du cercle est fondé, d'après notre texte, sur les principes contenus dans la Grande Syntaxe de Ptolémée, il sera utile de se rendre compte, en premier lieu, de la différence qui existe entre les méthodes d'Archimède et de Ptolémée, et d'expliquer jusqu'à quel point la seconde peut servir au même but que la première.

Archimède prend pour point de départ l'hexagone régulier circonscrit au cercle, dont le côté est au diamètre du cercle dans le rapport de 1 à $\sqrt{3}$. Il passe de là, par la bissection d'un angle au centre, au côté du dodécagone circonscrit pour déterminer de nouveau le rapport de ce côté au diamètre du cercle. Par trois autres bissections successives il parvient enfin à obtenir le rapport du côté du polygone régulier de quatre-vingt-seize côtés circonscrit au cercle, au diamètre. Ces bissections d'angles se traduisent, dans le calcul, par des extractions de racines carrées. Considérant ensuite les polygones inscrits, Archimède commence également par l'hexagone régulier, dont le côté est au diamètre du cercle dans le rapport de 1 à 2, et détermine, au moyen de quatre bissections d'angles à la circonférence, le rapport du côté du polygone régulier de quatre-vingt-seize côtés inscrit dans le cercle, au diamètre. A ces nouvelles bissections dans la figure géométrique correspondent pareillement, dans le calcul, des extractions de racines carrées.

Multipliant par 96 les deux rapports auxquels il est arrivé en dernier lieu, Archimède a deux limites entre lesquelles doit être compris le rapport de la circonférence au diamètre du cercle. Il trouve ainsi que ce rapport est plus petit que $3\frac{1}{7}$ et plus grand que $3\frac{10}{71}$.

Remarquons surtout que, dans les calculs auxquels cette méthode donne lieu, il n'entre d'autres opérations que des résolutions de proportions et des extractions de racines carrées, c'est-à-dire des opérations dans lesquelles, même lorsqu'on les exécute à la manière des anciens, le degré de précision du résultat ne dépend que de la volonté et de la patience du calculateur.

Il n'existe donc, chez Archimède, aucune erreur inhérente à la méthode comme telle. Celle-ci est parfaitement rigoureuse. En continuant les bissections, et en prolongeant suffisamment les extractions des racines, on pourra, d'après cette méthode, déterminer le rapport cherché avec une précision qu'on poussera aussi loin qu'on voudra, pourvu qu'on ne se laisse pas rebuter par la longueur des calculs.

Il n'en est pas de même de la méthode de Ptolémée. L'objet propre de Ptolémée est de calculer une table de cordes. Or certaines cordes peuvent être considérées comme des côtés de polygones réguliers inscrits, et, par le procédé employé dans le texte ci-dessus, on peut immédiatement calculer le côté d'un polygone circonscrit correspondant à un côté donné de polygone inscrit. On peut donc faire servir la méthode de Ptolémée au même but que celle d'Archimède, et, par conséquent, la comparer à cette dernière.

Ptolémée calcule le côté du pentagone régulier inscrit, ou la corde de 72°; de cette valeur et de la corde de 60°, qui est égale au rayon, il déduit la valeur de la corde de 12°, et de là, par deux bissections successives, celle de la corde de 3°. Toutes ces évaluations se font au moyen de proportions et d'extractions de racines carrées.

Mais Ptolémée a surtout en vue, et a surtout besoin de calculer *la corde d'un degré*, parce que le degré est l'unité à laquelle se rapporte la division du cercle, qui est la base de tous les calculs astronomiques. C'est à quoi il est impossible de parvenir par des opérations n'impliquant que des radicaux du second degré. Pour arriver de la corde de 3° à celle de 1° il faudrait passer par une trisection d'angle ou par une équation du troisième degré, que Ptolémée ne sait pas résoudre. Ne pouvant aborder son problème directement, il a donc recours à un moyen indirect, à un procédé d'interpolation. C'est là ce qui produit, dans l'évaluation des cordes de 1° et des arcs plus petits que 1°, un défaut d'exactitude inhérent à la méthode même, défaut qu'il m'importe de signaler ici, et qui ne permet plus de pousser la précision du calcul au delà d'une certaine limite bien déterminée, tant qu'on suit la marche de Ptolémée.

Tirant de la valeur de la corde de 3°, par des bissections, les valeurs des cordes de $(\frac{3}{2})^\circ$ et de $(\frac{3}{4})^\circ$, et ayant trouvé que la corde de 1° doit être comprise entre $\frac{4}{3}$. cord $(\frac{3}{4})^\circ$ et $\frac{2}{3}$. cord $(\frac{3}{2})^\circ$, Ptolémée adopte comme valeur de la corde de 1° la valeur commune que prennent ces deux dernières quantités pour le degré d'exactitude qu'il voulait obtenir dans sa table de cordes. Cependant on peut, sans craindre de lui prêter une précision qu'il n'aurait pas réellement eue, considérer cette valeur comme la moyenne arithmétique des deux limites que Ptolémée a posées; on peut dire qu'il fait

$$\text{cord } 1^\circ = \frac{1}{2}\left\{\frac{4}{3}\text{ cord } 45' + \frac{2}{3}\text{ cord } 1^\circ\, 30'\right\}$$

Il égale ainsi deux quantités qui, en réalité, sont différentes; l'erreur de sa méthode sera par conséquent égale à la différence de ces deux quantités. Désignant cette erreur par ε on aura donc :

$$\begin{aligned}
\varepsilon &= \text{cord } 1^\circ - \tfrac{1}{2}\left\{\tfrac{4}{3}\text{ cord } 45' + \tfrac{2}{3}\text{ cord } 1^\circ 30'\right\}\\
&= 2\left\{\sin 30' - \tfrac{2}{3}\sin 22' 30'' - \tfrac{1}{3}\sin 45'\right\}\\
&= 2\left\{0{,}0087265 35.5 - 0{,}004363292 - 0{,}004363198.5\right\}\\
&= 0{,}000000009\,,
\end{aligned}$$

ou un peu moins d'un dix millionième [1]. Une erreur de tel ordre s'introduit conséquemment dans les résultats à partir du moment où l'on a employé le procédé d'interpolation de Ptolémée, quel que soit le degré de précision auquel on se soit astreint dans les parties précédentes et subséquentes du calcul.

Pour Ptolémée, une erreur de cet ordre est insignifiante, parce qu'il ne calcule ses cordes que jusqu'aux secondes, de sorte qu'il néglige les quantités inférieures aux demi-secondes ou à $\frac{1}{432000}$ du rayon. En effet il pose cord $1^\circ = 1^p\, 2'\, 50'' = 0{,}0174537$ au lieu de $0{,}017453071$.

Mais pour les opérations de notre texte, où les valeurs sont calculées jusqu'aux sexagésimales cinquièmes, cette erreur serait très-considérable et rendrait inutile la peine qu'on s'est donnée de calculer les sexagésimales quatrièmes et cinquièmes.

[1] Dans un autre endroit j'ai trouvé la même valeur par des considérations différentes. Voir le Journal de mathématiques pures et appliquées, publié par M. Liouville, t. XIX (année 1854), p. 165.

II.

Cette circonstance dut me faire soupçonner que le procédé d'Aboûl Wafâ ne pouvait avoir été exactement pareil à celui de Ptolémée, et me fit désirer de connaître, s'il était possible, le calcul original d'Aboûl Wafâ. J'ai été assez heureux pour retrouver ce calcul dans un manuscrit de l'Almageste d'Aboûl Wafâ, que possède la Bibliothèque impériale, coté n° 1138, ancien fonds arabe.

L'examen de ce manuscrit a non-seulement confirmé entièrement ma supposition, mais m'a révélé en outre un fait historique intéressant par rapport au développement et aux progrès des mathématiques dans l'école arabe du moyen âge.

Les lecteurs de ce Journal se souviennent sans doute d'un article sur l'algèbre chez les Arabes, publié par M. Sédillot dans le cahier de septembre-octobre 1853. Comme preuve à l'appui de l'opinion favorable qu'il avait exprimée sur les travaux des Arabes, M. Sédillot fit connaître dans cet article un passage de Mériem-al-Tchélébi, commentateur d'Oloug-Beg. Ce passage contient l'exposé de deux méthodes pour déterminer une valeur approchée de sin 1°, dont l'une est une méthode d'interpolation conçue dans l'esprit de celle de Ptolémée, mais se distinguant de cette dernière par des perfectionnements qui lui donnent l'avantage d'une précision bien supérieure. J'ai démontré plus tard que l'erreur de cette méthode n'est qu'un onzième environ de celle de Ptolémée[1].

Il n'était pas sans intérêt de savoir à quelle époque remonte ce progrès fait au delà de la science grecque, et dont on constatait l'existence chez les astronomes arabes; mais Mériem-al-Tchélébi, auteur du XV^e siècle, se borne à dire, de la méthode en question, que «les savants s'en sont servis,» ce qui prouve seulement qu'elle était en usage avant lui, mais ne nous apprend pas si cet usage était, au temps de Mériem-al-Tchélébi, ancien ou moderne.

Or l'examen du manuscrit 1138, ancien fonds arabe, m'a fait reconnaître que la méthode d'interpolation décrite par Mériem-al-Tchélébi est identiquement celle d'Aboûl Wafâ, donc que son emploi chez les astronomes arabes date, au moins, du X^e siècle de notre ère; on remarque même qu'elle donne lieu, chez l'astronome du X^e siècle, à un résultat d'une précision considérablement plus grande encore que chez Mériem-al-Tchélébi. Cela tient à ce que le calcul d'Aboûl Wafâ a pour objet la détermination de sin 30′ au lieu de sin 1°, et à ce que les intervalles dont il fait usage dans son interpolation sont moins grands de moitié que ceux de Mériem-al-Tchélébi.

Le calcul d'Aboûl Wafâ se trouve exposé dans la huitième section du cinquième chapitre du premier livre de son Almageste (fol. 10 v°, l. 12, à fol. 11 v°, l. 12, du manuscrit 1138, ancien fonds arabe).

[1] Voir le Journal de M. Liouville, vol. XIX, p. 166.

Aboûl Wafâ démontre en premier lieu, comme proposition auxiliaire, que :

$$\sin(\alpha + \beta) - \sin\alpha < \sin\alpha - \sin(\alpha - \beta),$$

si $\alpha - \beta$, α et $\alpha + \beta$ sont des arcs compris dans le premier quart de la circonférence.

Il établit que, connaissant les cordes de 36° et de 60°, on en tire, par des bissections successives, les valeurs de $\sin\left(\frac{18}{32}\right)^\circ$ et de $\sin\left(\frac{15}{32}\right)^\circ$; on en tire, en outre, la valeur de $\sin\left(\frac{12}{32}\right)^\circ$, soit en considérant ce dernier arc comme la différence $\left(\frac{18}{2^3}\right)^\circ - \left(\frac{30}{2^4}\right)^\circ$, soit en le considérant comme déduit de la différence des arcs de 36° et de 30°, attendu que $\left(\frac{12}{32}\right)^\circ = \frac{36^\circ - 30^\circ}{2^4}$.

Il fait observer que, ne pouvant pas déterminer $\sin\left(\frac{16}{32}\right)^\circ$ comme le sinus de la différence de deux arcs dont on connaîtrait les sinus, on n'a d'autre ressource que d'en trouver la valeur par approximation.

Faisant ensuite usage du lemme préalablement démontré, il obtient

$$\sin\left(\tfrac{16}{32}\right)^\circ - \sin\left(\tfrac{15}{32}\right)^\circ > \tfrac{1}{3}\left\{\sin\left(\tfrac{18}{32}\right)^\circ - \sin\left(\tfrac{15}{32}\right)^\circ\right\},$$

donc

$$\sin\left(\tfrac{16}{32}\right)^\circ > \sin\left(\tfrac{15}{32}\right)^\circ + \tfrac{1}{3}\left\{\sin\left(\tfrac{18}{32}\right)^\circ - \sin\left(\tfrac{15}{32}\right)^\circ\right\},$$

et pareillement

$$\sin\left(\tfrac{16}{32}\right)^\circ < \sin\left(\tfrac{15}{32}\right)^\circ + \tfrac{1}{3}\left\{\sin\left(\tfrac{15}{32}\right)^\circ - \sin\left(\tfrac{12}{32}\right)^\circ\right\}.$$

Il a, de cette manière, deux limites entre lesquelles est compris le sin 3o′, et dont il prend la moyenne arithmétique comme la valeur la plus approchée possible de ce sinus; le double de cette valeur sera celle de la corde de 1°.

Il ajoute enfin que l'on peut, d'une manière semblable, trouver la valeur de sin 1°.

Rendons-nous compte d'abord de l'erreur que comporte ce procédé comme méthode, pour examiner ensuite le degré d'exactitude des valeurs numériques qui résultent des calculs d'Aboûl Wafâ.

Aboûl Wafâ égale le sinus de la moitié d'un degré à la moyenne arithmétique des limites qu'il vient de lui assigner; l'erreur de sa méthode aura donc pour mesure la différence entre ces deux quantités, à savoir la différence

$$\sin\left(\tfrac{16}{32}\right)^\circ - \left\{ \sin\left(\tfrac{15}{32}\right)^\circ + \tfrac{1}{6}\left(\sin\left(\tfrac{18}{32}\right)^\circ - \sin\left(\tfrac{12}{32}\right)^\circ\right)\right\}.$$

Ayant calculé les valeurs des quantités qui entrent dans cette formule jusqu'à la quinzième décimale, je trouve

$$\sin 30' = 0{,}008.726.535.498.374$$
$$\sin 28'7'',5 + \tfrac{1}{6}(\sin 33'45'' - \sin 22'30'') = 0{,}008.726.536.498.903$$

différence : $= 0{,}000.000.001.000.529$

même différence exprimée en sexagésimales : $= 0^{p}\,0'\,0''\,0'''\,0^{iv}\,46^{v}\,40^{vi}\,50^{vii}$,

d'où il suit que la méthode d'interpolation d'Aboûl Wafâ donne une valeur trop forte de $46^{v},7$ ou d'un mille millionième environ. Désignons cette quantité, dont nous aurons encore à faire usage dans la suite, par dM.

Pour contrôler maintenant les résultats numériques d'Aboûl Wafâ, j'en ai calculé les valeurs exactes; je les fais suivre ci-après, exprimées en décimales et en sexagésimales, plaçant au-dessous de chacune la valeur trouvée par Aboûl Wafâ, de manière qu'on pourra immédiatement apprécier l'erreur de cette dernière :

$$\begin{aligned} \sin 33'\,45'' &= 0{,}009.817.319.337.149.622 \\ &= 0^{p}\,35'\,20''\,32'''\,27^{\mathrm{iv}}\,30^{\mathrm{v}}\,59^{\mathrm{vi}}\,38^{\mathrm{vii}}\,35^{\mathrm{viii}}\,24^{\mathrm{ix}} \\ \text{d'après Aboûl Wafâ:} &= 0^{p}\,35'\,20''\,32'''\,27^{\mathrm{iv}}\,29^{\mathrm{v}} \end{aligned}$$ [1]

$$\begin{aligned} \sin 28'\,7'',5 &= 0{,}008.181.139.603.937.104 \\ &= 0^{p}\,29'\,27''\,7'''\,34^{\mathrm{iv}}\,9^{\mathrm{v}}\,21^{\mathrm{vi}}\,40^{\mathrm{vii}}\,38^{\mathrm{viii}}\,32^{\mathrm{ix}} \\ \text{d'après Aboûl Wafâ:} &= 0^{p}\,29'\,27''\,7'''\,34^{\mathrm{iv}}\,19^{\mathrm{v}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sin 22'\,30'' &= 0{,}006.544.937.967.351.859 \\ &= 0^{p}\,23'\,33''\,42'''\,23^{\mathrm{iv}}\,45^{\mathrm{v}}\,48^{\mathrm{vi}}\,17^{\mathrm{vii}}\,9^{\mathrm{viii}}\,58^{\mathrm{ix}} \\ \text{d'après Aboûl Wafâ:} &= 0^{p}\,23'\,33''\,42'''\,23^{\mathrm{iv}}\,56^{\mathrm{v}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sin 28'\,7'',5 + \tfrac{1}{6}\,\{\sin 33'\,45'' - \sin 22'\,30''\} \\ &= 0{,}008.726.536.498.903.398 \\ &= 0^{p}\,31'\,24''\,55'''\,54^{\mathrm{iv}}\,46^{\mathrm{v}}\,53^{\mathrm{vi}}\,34^{\mathrm{vii}}\,12^{\mathrm{viii}}\,46^{\mathrm{ix}} \\ \text{d'après Aboûl Wafâ:} &= 0^{p}\,31'\,24''\,55'''\,54^{\mathrm{iv}}\,55^{\mathrm{v}} \end{aligned}$$

Désignant sin $28'\,7'',5$ par a, sin $33'\,45''$ par b, sin $22'\,30''$ par c, et les erreurs des valeurs numériques qu'Aboûl Wafâ calcule pour ces trois quantités [2], par da, db, dc respectivement, on a

[1] Le ms. de la Bibliothèque impériale porte 37 au lieu de 32 pour les tierces, ce qui n'est évidemment qu'une erreur de copiste.

[2] Aboûl Wafâ donne aussi, dans ce chapitre, la valeur de :

$$\text{cord } 36^{\circ} = 37^{p}\,4'\,55''\,20'''\,29^{\mathrm{iv}}\,39^{\mathrm{v}};$$

$$da = +\,9^{\text{v}},6, \quad db = -\,2^{\text{v}},0, \quad dc = +\,10^{\text{v}},2.$$

L'erreur que ces trois erreurs produisent dans le résultat final s'exprime par

$$da + \tfrac{1}{6}(db - dc) = +\,7^{\text{v}},6,$$

tandis qu'on avait

$$dM = +\,46^{\text{v}},7.$$

L'erreur provenant de l'imperfection de la formule d'interpolation est donc environ six fois plus

cette valeur est entièrement exacte, car je trouve :

$$\sin 18^\circ = 0,309.016.994.375$$

ou :

$$18^{\text{p}}\,32'\,27''\,40'''\,14^{\text{iv}}\,49^{\text{v}}\,33^{\text{vi}},5,$$

d'où :

$$\text{cord } 36^\circ = 37^{\text{p}}\,4'\,55''\,20'''\,29^{\text{iv}}\,39^{\text{v}}\,7^{\text{vi}}.$$

Le calcul de cette valeur n'exige du reste que l'extraction d'une seule racine carrée ; car on a :

$$\sin 18^\circ = \tfrac{1}{4}\left(\sqrt{5} - 1\right).$$

Le ms. de la Bibliothèque impériale porte 49^{iv} au lieu de 29^{iv}, évidemment par suite d'une erreur de copiste. A la fin du chapitre, Aboûl Wafâ donne aussi la valeur de :

$$\sin 1^\circ = 1^{\text{p}}\,2'\,49''\,43'''\,17^{\text{iv}}\,35^{\text{v}},$$

mais sans exposé du calcul par lequel il l'a trouvée. Cette valeur est beaucoup plus inexacte que celle qu'il calcule pour sin 30′, l'erreur étant de $6^{\text{iv}},3$; car je trouve :

$$\sin 1^\circ = 0,017.452.406.437$$

ou :

$$1^{\text{p}}\,2'\,49''\,43'''\,11^{\text{iv}}\,14^{\text{v}}\,44^{\text{vi}};$$

c'est peut-être qu'une erreur s'est glissée dans le nombre des sexagésimales quatrièmes par une faute de copiste.

grande que celle produite par l'inexactitude des quantités qui entrent dans cette formule. Il suit de là qu'Aboûl Wafâ, en s'arrêtant, dans le calcul des trois sinus qui entrent dans sa formule, aux sexagésimales cinquièmes, a jugé avec justesse le degré d'exactitude que comportait son procédé.

L'erreur du résultat final d'Aboûl Wafâ doit se composer de l'erreur dM de la méthode, et de l'influence qu'exercent les erreurs des valeurs numériques, et qui s'exprime par la formule

$$da + \frac{1}{6}(db - dc).$$

A cette dernière partie il faut ajouter encore une erreur de $+ 0^{v},5$ qu'Aboûl Wafâ commet en négligeant, pendant qu'il prend la moyenne arithmétique des deux limites de sin 30′, une quantité de 30 sexagésimales sixièmes; car les trois valeurs qu'Aboûl Wafâ assigne à a, b, c, substituées dans la formule $a + \frac{1}{6}(b - c)$, donnent rigoureusement

$$0^{p}31'24''55'''54^{iv}54^{v}30^{vi}$$

au lieu de 55^{v}, valeur adoptée par Aboûl Wafâ.

L'erreur totale du résultat final d'Aboûl Wafâ, c'est-à-dire de la valeur qu'il trouve pour sin 30′, sera donc de :

$$7^{v},6 + 46^{v},7 + 0^{v},5 = 54^{v},8$$

en plus. En effet j'obtiens

$$\sin 30' = 0^{p}31'24''55'''54^{iv}0^{v}12^{vi}44^{vii},$$

tandis que Aboûl Wafâ fait

$$\sin 30' = 0^{p}\,31'\,24''\,55'''\,54^{\text{iv}}\,55^{\text{v}};$$

différence :

$$= 54^{\text{v}}\,47^{\text{vi}}\,16^{\text{vii}}$$
$$= 0{,}000.000.001.174.292$$

III.

Cette discussion du calcul original d'Aboûl Wafâ terminée, ce qu'il importe surtout de remarquer, c'est que la valeur que le calcul d'Aboûl Wafâ donne pour le *sinus* d'un demi-degré, à savoir:

$$0^{p}\,31'\,24''\,55'''\,54^{\text{iv}}\,55^{\text{v}},$$

est *identiquement* celle qu'il aurait assignée, d'après notre texte, à la *corde* d'un demi-degré.

Il ne peut pas être un instant douteux qu'il n'y ait ici une erreur, et que c'est notre texte qui se trompe; mais on peut supposer que l'auteur du texte a voulu présenter seulement un exemple [1] du calcul numérique auquel donne lieu sa méthode pour trouver une valeur approchée du rapport de la circonférence au diamètre, et qu'il ne s'est préoccupé sérieusement ni de l'exactitude du nombre dont il se servait pour cet exemple, ni de la précision du résultat, qu'il ne considérait pas comme définitif.

Pour connaître l'erreur que l'auteur commet immédiatement en substituant la valeur trouvée par Aboûl Wafâ pour sin 3o' à celle de la corde de 3o', j'ai calculé la vraie valeur de cord 3o'; j'obtiens :

[1] C'est même le mot dont il se sert. Voy. ci-dessus la traduction, p. 13, l. 10.

$$\sin 15' = 0,004.363.309.284.75,$$

d'où :

$$\begin{aligned}\text{cord } 30' &= 0,008.726.618.569.5\\ &= 0^{p}31'24''56'''58^{\text{iv}}35^{\text{v}}58^{\text{vi}};\end{aligned}$$

par conséquent, comme la valeur de sin 30′, d'après Aboûl Wafâ est

$$0^{p}31'24''55'''54^{\text{iv}}55^{\text{v}},$$

l'auteur, en employant cette dernière à la place de celle de cord 30′, prend, pour base de son calcul, une donnée affectée d'une erreur de

$$1'''3^{\text{iv}}41^{\text{v}}$$

ou de la 12000000^me partie du rayon environ.

Pour juger de l'influence que cette erreur a sur celle du résultat final, il faut remarquer que cette dernière se compose de deux parties.

La première partie, que nous désignerons par $\delta\pi$, provient de la méthode de l'auteur, à savoir de ce qu'il considère un petit arc comme la moyenne arithmétique entre les côtés des deux polygones, inscrit et circonscrit, correspondant à cet arc; en d'autres termes de ce qu'il pose :

$$\text{arc } 30' = \tfrac{1}{2}\{\text{cord } 30' + 2\,\text{tg } 15'\},$$

d'où :

$$\pi = 360\{\sin 15' + \text{tg } 15'\},$$

ce qui n'est pas rigoureusement exact[1]. En effet, on a :

[1] Pour se rendre compte, d'une manière plus générale, de l'er-

$$360\{\sin 15' + \mathrm{tg}\, 15'\} = 3{,}1415976,$$
$$\pi = 3{,}1415927;$$

donc :

$$\delta\pi = +\, 0{,}0000049.$$

La seconde partie de l'erreur du résultat final, que nous désignerons par $d\pi$, provient de ce que l'auteur emploie une valeur inexacte de la corde ou du côté du polygone inscrit; et comme c'est de cette valeur qu'il déduit aussi celle du côté correspondant du polygone circonscrit, l'inexactitude du premier côté entraînera celle du second et influera ainsi de deux manières sur le résultat.

Si nous désignons par c le côté du polygone inscrit de 720 côtés, par C le côté correspondant du polygone circonscrit, notre texte fait :

$$\pi = 180\,(C + c),$$

où

$$C = \frac{c}{\sqrt{1 - \left(\frac{c}{2}\right)^2}};$$

reur qu'on commet en considérant l'arc comme la moyenne arithmétique entre le sinus et la tangente, on a :

$$\mathrm{tg}\, a = a + \tfrac{1}{3} a^3 + \tfrac{2}{15} a^5 + \tfrac{17}{315} a^7 + \ldots$$
$$\sin a = a - \tfrac{1}{6} a^3 + \tfrac{1}{120} a^5 - \tfrac{1}{5040} a^7 + \ldots$$

d'où :

$$\tfrac{1}{2}(\mathrm{tg}\, a + \sin a) = a + \tfrac{1}{12} a^3 + \tfrac{17}{240} a^5 + \tfrac{271}{10080} a^7 + \ldots$$

et, en considérant l'arc a comme la $(2m)^{\text{ième}}$ partie de la circonférence, on aura :

$$\delta\pi = \frac{1}{12.m^2}\pi^3 + \frac{17}{240.m^4}\pi^5 + \frac{271}{10080.m^6}\pi^7 + \ldots$$

prenant la formule différentielle, on obtient :

$$d\pi = \left\{ \frac{1}{\left(1 - \frac{c^2}{4}\right)^{\frac{3}{2}}} + 1 \right\} . 180 . \, dc.$$

Nous avons vu que l'erreur dc de la valeur de la corde de 30′ employée par l'auteur, est de :

$$1''' \, 3^{iv} \, 41^{v} ;$$

pour

$$\frac{c}{2} = 0,0043633 , \; dc = - 1''' \, 3^{iv} \, 41^{v} = - 0,000.000.081.897,$$

on a :

$$\frac{1}{\left(1 - \frac{c^2}{4}\right)^{\frac{3}{2}}} = 1,00003 ;$$

donc sensiblement :

$$d\pi = 360 . \, dc = - 0,0000295.$$

C'est de ces deux quantités $\delta\pi$ et $d\pi$ que se compose, comme on vient de le dire, l'erreur du résultat final. En effet, d'un côté nous venons de trouver :

$$\delta\pi = + 0,0000049$$
$$d\pi = - 0,0000295$$

donc : $\delta\pi + d\pi = - 0,0000246 ;$

et, d'un autre côté, nous verrons que le résultat final de notre texte est :

$$\pi' = 3,14156815$$

tandis que en réalité :

$$\pi = 3,14159265$$

donc erreur du résultat final :

$$\pi' - \pi = -0,0000245.$$

Même en s'en tenant aux valeurs qu'on pouvait prendre immédiatement dans l'ouvrage d'Aboûl Wafâ sans nouveau calcul, il eût été plus avantageux pour l'auteur de notre texte d'employer la valeur calculée par Aboûl Wafâ pour la corde de 1°, et de trouver la circonférence comme la moyenne arithmétique entre les périmètres des deux polygones inscrit et circonscrit de 360 côtés. L'auteur croyait probablement que l'erreur provenant de la substitution du sin 30′ à la corde de 30′ serait plus que compensée par l'avantage d'opérer sur des polygones de 720 côtés (avantage qui s'exprime par la diminution de $\delta\pi$); mais il n'en est pas ainsi. En effet, prenant pour point de départ la corde de 1° calculée par Aboûl Wafâ, et employant les mêmes notations comme tout à l'heure, on a :

$$\delta\pi = 180\,(\sin 30' + \operatorname{tg} 30') - \pi,$$

ou, en prenant le premier terme de la série (p. 29) :

$$\delta\pi = \frac{1}{12.(360)^2}\,\pi^3,$$

ce qui donne :

$$\delta\pi = +0,0000200;$$

ensuite, pour le cas actuel, la méthode du texte fait :

$$\pi = 90\,(C + c)$$

donc :

$$d\pi = \left\{ \frac{1}{\left(1 - \frac{c^2}{4}\right)^{\frac{3}{2}}} + 1 \right\} .90.dc,$$

où :

$$\frac{c}{2} = \sin 30' = 0,0087265,$$

$$dc = + 1^{\text{iv}} 49^{\text{v}},6 = 0,000.000.002.35\ [1],$$

ce qui donne :

$$d\pi = (2,000114).90.dc$$
$$= + 0,0000004 ;$$

donc erreur du résultat final :

$$\delta\pi + d\pi = + 0,0000204.$$

L'auteur aurait obtenu de cette manière pour le rapport de la circonférence au diamètre une valeur trop forte d'un cinquante millième environ, tandis qu'il en a trouvé une trop faible d'un quarante millième environ.

Mais il aurait pu facilement arriver à un résultat final bien plus exact encore, s'il avait déduit de la valeur de sin 30′ calculée par Aboûl Wafâ, celle de sin 15′ au moyen de la formule

$$\sin \tfrac{1}{2} \alpha = \sqrt{\tfrac{1}{2} \sin \text{vers}\, \alpha},$$

formule connue aux astronomes arabes, et d'ailleurs identique à la formule

$$\text{cord}\, \tfrac{1}{2} \alpha = \sqrt{2 - \sqrt{4 - (\text{cord}\, \alpha)^2}}$$

[1] Cette quantité est le double de l'erreur dont est affectée la valeur trouvée par Aboûl Wafâ pour sin 30′, erreur déterminée ci-dessus (p. 27).

posée déjà par Ptolémée. Il obtenait ainsi la valeur de sin 15′, et par suite celle de cord 30′, au moyen de deux extractions de racines carrées, dont il pouvait pousser l'exactitude aussi loin qu'il voulait[1], de sorte que l'erreur de cette valeur de cord 30′ ne dépendait que de celle de la valeur de sin 30′ qu'il prenait dans l'ouvrage d'Aboûl Wafâ. Cette dépendance s'exprime par la formule différentielle :

$$d\left(\sin \tfrac{1}{2}\alpha\right) = \frac{\cos \frac{1}{2}\alpha}{2 \cos \alpha}\, d(\sin \alpha),$$

donc l'erreur de la corde de α

$$dc = \frac{\cos \frac{1}{2}\alpha}{\cos \alpha}\, d(\sin \alpha).$$

On a : $$d(\sin \alpha) = 0{,}000.000.001.174,$$

$$\frac{\cos 15'}{\cos 30'} = 1{,}0000286,$$

$$d\pi = \left\{ \frac{1}{\left(1 - \frac{c^2}{4}\right)^{\frac{3}{2}}} + 1 \right\} .180.\, dc,$$

ce qui donne :

$$d\pi = + 0{,}0000004\,;$$

en même temps :

$$\delta\pi = + 0{,}0000049,$$

de sorte que :

$$\delta\pi + d\pi = + 0{,}0000053.$$

[1] Nous verrons plus loin que l'auteur a exécuté, dans notre texte, une extraction de racine absolument pareille à celles dont il s'agit ici, et que la valeur qu'il trouve doit être considérée comme rigoureusement exacte, l'erreur ne s'élevant pas à une demi-unité du dernier ordre de sexagésimales auquel l'auteur a égard.

De cette manière l'auteur aurait obtenu, au moyen de formules et d'opérations de calcul qui lui étaient familières, et avec les données qu'il pouvait prendre dans l'Almageste d'Aboûl Wafâ, une valeur de π qui n'était plus affectée que d'une erreur de un deux cent millième environ, et, par conséquent, plus exacte que la valeur indienne 3,1416 dont il sera question encore dans la suite.

Il résulte cependant des formules que je viens de donner que, si l'on continuait de cette manière en tirant de la valeur de sin 15′ celle de sin 7′30″, et ainsi de suite, on ne pourrait pas diminuer indéfiniment l'erreur du résultat final; car on voit aisément que la partie $\delta\pi$ décroît en effet indéfiniment, mais que la partie $d\pi$ converge vers la limite 360. ds, ds étant l'erreur dont est affectée la valeur de sin 30′ trouvée par Aboûl Wafâ. Or, nous avons vu que, en supposant même tous les calculs numériques exécutés avec une exactitude absolue, par suite du procédé d'interpolation employé par Aboûl Wafâ, sa valeur de sin 30′ est nécessairement affectée d'une erreur de un mille millionième environ, d'où il suit que, tant que le calcul du nombre π reste fondé sur cette évaluation d'Aboûl Wafâ, l'erreur du résultat final ne pourra jamais décroître au-dessous de :

$$0,00000036.$$

Il suit de là que l'inconvénient signalé ci-dessus, pour une méthode qui s'appuierait sur le calcul de

Ptolémée, se présente également, quoique un peu plus tard, dans celle de notre texte, qui prend pour base le calcul d'Aboûl Wafâ, parce que l'un et l'autre de ces calculs dépendent d'une interpolation. Il ne reste donc, des méthodes connues aux géomètres du moyen âge, que celle d'Archimède qui permette d'approcher, dans le calcul du nombre π, indéfiniment de la valeur exacte. Toutefois notre texte contient un perfectionnement notable de la méthode d'Archimède; car, tandis que celui-ci calcule, indépendamment les uns des autres, d'abord les côtés de tous les polygones circonscrits, et, ensuite, ceux de tous les polygones inscrits, la méthode de notre texte ne calcule que les côtés des polygones inscrits, et trouve ensuite, pour le côté du polygone inscrit auquel on s'arrête, le côté correspondant du polygone circonscrit, réduisant ainsi à peu près de moitié la longueur des calculs du procédé d'Archimède.

Il est vrai que les astronomes arabes auraient pu affranchir la méthode de notre texte de la défectuosité que nous venons d'y reconnaître. Ayant les valeurs de :

$$\sin\left(\frac{12}{2^5}\right)^\circ, \sin\left(\frac{15}{2^5}\right)^\circ, \sin\left(\frac{18}{2^5}\right)^\circ,$$

ils pouvaient, par de nouvelles bissections, déterminer les valeurs de :

$$\sin\left(\frac{12}{2^n}\right)^\circ, \sin\left(\frac{15}{2^n}\right)^\circ, \sin\left(\frac{18}{2^n}\right)^\circ,$$

où $n > 5$, et poser ensuite, en vertu des principes ci-dessus mentionnés :

$$\sin\left(\frac{16}{2^n}\right)^\circ = \sin\left(\frac{15}{2^n}\right)^\circ + \frac{1}{6}\left\{\sin\left(\frac{18}{2^n}\right)^\circ - \sin\left(\frac{12}{2^n}\right)^\circ\right\}.$$

Développant les sinus en série, on trouve, pour l'erreur ds de la valeur que cette formule assigne au sin $\left(\frac{16}{2^n}\right)^\circ$, en prenant pour mesure de cette erreur le premier terme de la série qui l'exprime, et négligeant les termes suivants, eu égard à leur petitesse:

$$ds = + \frac{1}{(30501,23).2^{3n}}.$$

Désignant l'erreur de la corde de $\left(\frac{16}{2^{n-1}}\right)^\circ$ par dc, employant, du reste, les mêmes notations que ci-dessus, et prenant, vu la petitesse de c, dC = dc, on aura :

$$d\pi = 180.\ 2^{n-5}.\ dc = 180.\ 2^{n-4}.\ ds,$$

ou :

$$d\pi = + 0,00036884.\ \frac{1}{2^{2n}};$$

en même temps :

$$\delta\pi = + 0,02041566.\ \frac{1}{2^{2n}},$$

donc :

$$d\pi + \delta\pi = + 0,0207845.\ \frac{1}{2^{2n}},$$

de sorte que l'erreur de l'évaluation de π décroît indéfiniment, au fur et à mesure que l'on continue les bissections.

Mais perfectionner ainsi la méthode de notre texte, ce serait en méconnaître l'esprit, qui consiste à utiliser, pour la détermination du nombre π, des valeurs calculées dans un autre but, à savoir, pour la construction d'une table de cordes ou de sinus. On serait, en outre, obligé de faire chaque fois trois bissections pour une qu'exige la méthode d'Archimède, et ne réussirait pourtant pas à se débarrasser entièrement de la partie de l'erreur que nous avons désignée par $d\pi$, tandis que la méthode d'Archimède en est complétement libre, et ne comporte que l'erreur $\delta\pi$.

IV.

Examinons maintenant les nombres que nous présente le texte ci-dessus, dans le calcul par lequel on déduit de la corde de 30′ les périmètres des deux polygones réguliers de 720 côtés, dont l'un est inscrit et l'autre circonscrit au cercle.

Les valeurs du périmètre du polygone inscrit et les quantités AD, $\overline{AD}^2$, $r^2 - \overline{AD}^2$ ne donnent lieu à aucune observation; elles sont déduites avec une exactitude parfaite[1] de celle de cord 30′. Dans la valeur de $r^2 - \overline{AD}^2$ on vérifie aisément que 55‴ au lieu de 15‴ n'est qu'une erreur de copiste. L'extraction de la racine $\sqrt{r^2 - \overline{AD}^2} = CD$ est également

[1] Dans la valeur de AD on a négligé une demi-unité des sexagésimales cinquièmes; d'après l'usage actuel des calculateurs on l'aurait considérée comme une unité entière, et l'on aurait écrit 28ᵛ, au lieu de 27ᵛ, si l'on ne voulait pas aller au delà des sexagésimales cinquièmes.

exacte; le dernier chiffre de $51''$ est un peu trop fort, mais beaucoup plus exact que si l'on posait $50''$. Dans le résultat de la division (AD. r) : CD = EH le dernier chiffre de $45'$ est également un peu trop fort. On ne voit pas bien pourquoi le texte pose ensuite, dans $2.\ EH = EZ$, $31'$ au lieu de $30'$; cependant le nombre $12''$, dans la valeur du périmètre du polygone circonscrit, qui est le produit exact de EZ par 720, prouve que $31'$ au lieu de $30'$ n'est pas une erreur de copiste. L'erreur de copiste par suite de laquelle le nombre 16 a été placé entre 376 et 59 dans la valeur de ce dernier périmètre, s'explique peut-être de la manière suivante. On a :

$$376^p = 6^n 16^p.$$

Il se peut que le texte original qu'avait sous les yeux le copiste du présent manuscrit, ait porté $6^n 16^p$ au lieu de 376^p, et que le copiste, en remplaçant la première manière d'écrire ce nombre par la seconde, ait oublié de supprimer le 16, ce qui lui donnait un ordre de sexagésimales de trop, et lui faisait écrire au bout « cinquièmes » au lieu de « quatrièmes. »

Le sens des dernières lignes du texte qui concernent la transformation des deux périmètres « afin de les rapporter à la mesure d'Archimède, » est assez caché, et ce passage me paraît offrir un exemple frappant des cas où le calcul peut devenir un moyen précieux de divination philologique.

L'auteur veut dire que

$$376^p\,59'\,23''\,54'''\,12^{iv} = \left\{3 + \frac{10}{70 + \frac{37}{60} + \frac{47}{60^2} + \frac{37}{60^3}}\right\} \text{fois le diamètre,}$$

$$376^p\,59'\,10''\,59''' = \left\{3 + \frac{10}{70 + \frac{38}{60} + \frac{41}{60^2} + \frac{21}{60^3}}\right\} \text{fois le diamètre.}$$

En effet, je trouve

$$\frac{10}{70 + \frac{37}{60} + \frac{47}{60^2} + \frac{37}{60^3}} = 16^p\,59'\,23''\,54'''\,13^{iv},04 = 0,141.583.110.236$$

$$\frac{10}{70 + \frac{38}{60} + \frac{41}{60^2} + \frac{21}{60^3}} = 16^p\,59'\,10''\,58''',85 \qquad = 0,141.553.196.379$$

$$\text{moyenne arithmétique } \mu = 0,141.568.153.308$$

L'auteur considère ensuite comme valeur approchée du rapport de la circonférence au diamètre

$$3 + \frac{10}{70 + \frac{38}{60} + \frac{14}{60^2} + \frac{29}{60^3}} = 3,141.568.151.726 = 3 + \mu',$$

c'est-à-dire, ayant les deux limites $\frac{a}{b}$ et $\frac{a}{b+\varepsilon}$, il prend comme moyenne non pas $\frac{1}{2}\left\{\frac{a}{b+\varepsilon} + \frac{a}{b}\right\}$, mais $\frac{a}{b+\frac{1}{2}\varepsilon}$ [1].

Si l'on prend la moyenne arithmétique des deux périmètres non transformés, on a pour la longueur de la circonférence exprimée en soixantièmes du rayon

[1] On a $\frac{1}{2}\left\{\frac{a}{b+\varepsilon} + \frac{a}{b}\right\} - \frac{a}{b+\frac{1}{2}\varepsilon} = \frac{a}{b}\left\{\frac{1}{4}\frac{\varepsilon^2}{b^2} - \frac{3}{8}\frac{\varepsilon^3}{b^3} + \frac{7}{16}\frac{\varepsilon^4}{b^4} - \dots\right\}$,
et pour $a = 10$, $b = \frac{15256057}{216000}$, $\varepsilon = \frac{3224}{216000}$, le premier terme

$$\frac{a}{b^3}\left(\frac{\varepsilon}{2}\right)^2 = 0,000.000.001.581;$$

tandis que $\mu - \mu' = 0,000.000.001.582$.

$$376^{p}\,59'\,17''\,26'''\,36^{iv},$$

ou, en prenant pour unité la longueur du diamètre,

$$3^{d}\,8'\,29''\,38'''\,43^{iv}\,18^{v} = 3,141.568.155.864.$$

En somme, il résulte du calcul de notre texte, comme valeur de π

$$3,1415681 5\ldots,$$

et comparant cette valeur à la valeur exacte :

$$3,14159265\ldots,$$

on voit que l'erreur de la mesure arabe est de $\frac{1}{40000}$ environ.

Prenant la moyenne arithmétique entre les deux limites déterminées par Archimède, on obtient $3\,\frac{141}{994} = 3,14185$; l'erreur est de $\frac{1}{4000}$ environ, donc dix fois plus grande que celle de la valeur arabe.

V.

Les Arabes connaissaient une autre valeur du nombre π, plus exacte encore que celle que nous venons de discuter. Elle se trouve dans l'algèbre de Mohammed Ben Moûçâ[1], qui pose ce rapport égal à $\frac{62832}{20000} = 3,1416$. L'erreur est de $\frac{3}{400000}$ à peu près, ou seulement un tiers environ de celle de la valeur calculée dans notre texte. Mohammed Ben Moûçâ dit de cette valeur qu'elle est employée par les astronomes, et c'est aux astronomes également que notre texte attribue la méthode qu'il expose. On doit donc se demander pourquoi les astronomes arabes,

[1] Voy. l'édition de Rosen, p. 71 de la traduction anglaise.

connaissant depuis longtemps une valeur fort exacte du nombre π, se sont appliqués à en chercher une autre, moins exacte, par des calculs assez pénibles.

Il n'est pas probable qu'ils eussent fait cela s'ils avaient eu connaissance du procédé par lequel la valeur $\frac{62832}{20000}$ avait été trouvée, et qu'ils eussent pu juger par là de son degré d'exactitude. Mais déjà Mohammed Ben Moûçâ lui-même paraît avoir été dans une parfaite ignorance à ce sujet; car il met cette valeur, à l'endroit cité, sur la même ligne avec une autre, savoir : $\sqrt{10} = 3,1623$, qui n'est qu'une approximation tout à fait grossière, l'erreur étant de $\frac{1}{50}$ environ. Après avoir proposé les deux valeurs, il ajoute : وكل ذلك قريب بعضه من بعض « tout cela est voisin l'un de l'autre, » en d'autres termes : « tout cela revient à peu près au même. »

Cette circonstance confirmerait, s'il en était besoin, la conjecture de Rosen, que la valeur $\frac{62832}{20000}$ est d'origine indienne[1]; car les Indiens ayant l'habitude de donner sans démonstrations et sous la forme de préceptes absolus les résultats théoriques ou numériques de leurs spéculations mathématiques et astronomiques, il y a lieu de croire que c'est ainsi que le rapport $\frac{62832}{20000}$ était proposé dans le Siddhânta, traduit sous le règne d'Almançoûr par Alfazârî, traduction dont Mohammed Ben Moûçâ rédigea un abrégé pour Almâmoûn[2].

[1] *Loc. laud.* p. 196 à 199. Rosen fait remarquer notamment que cette valeur se retrouve dans la *Lîlâvati* de Bhâskara Atchârya, sous la forme $\frac{3927}{1250} = \frac{62832}{20000}$.

[2] Voir *Casiri*, I, p. 429.

Mais un mémoire de M. Whish[1] nous apprend, d'une manière explicite, que la valeur $\frac{62832}{20000}$ se trouve dans l'*Aryabhattîya*, ouvrage d'Aryabhatta, qui vivait, d'après le même mémoire, au commencement du VI[e] siècle de notre ère, tandis que Colebrooke et M. Lassen sont disposés à reculer encore davantage l'époque de la vie de cet astronome, et à le placer au III[e] ou IV[e] siècle de notre ère[2]. En outre, M. Whish mentionne expressément que Aryabhatta ne rend compte en aucune façon de la manière dont il a obtenu la valeur qu'il donne.

On ne doit donc pas s'étonner que les astronomes arabes aient mis une certaine hésitation à employer pour une des constantes fondamentales des mathématiques une valeur de provenance douteuse, et qu'ils aient préféré déterminer cette valeur eux-mêmes. On peut seulement regretter qu'ils ne se soient pas servis pour cela de la méthode d'Archimède, qui leur aurait permis d'arriver à une plus grande précision. C'est ainsi qu'un géomètre du XVIII[e] siècle a retrouvé précisément le rapport $3,1416 = \frac{62832}{20000}$, en inscrivant au cercle le polygone régulier de 768 côtés, c'est-à-dire en ajoutant trois nouvelles bissections aux quatre bissections d'Archimède; c'est de cette manière aussi que les Indiens auraient trouvé, d'après la conjecture d'un savant italien, P. Franchini, la même valeur; opinion partagée

[1] *Transactions of the Royal Asiatic Society of Great-Britain and Ireland*, vol. III, London, 1831, in-4°, p. 509 et suiv.

[2] Colebrooke, *Miscellaneous essays*. London, 1837, t. II, p. 471 à 477. Lassen, *Indische Alterthumskunde*, t. II (Bonn, 1849), p. 1133 à 1136.

par M. Chasles[1], et émise aussi par M. Whish dans le mémoire ci-dessus cité.

VI.

Avant de terminer je ferai remarquer encore une particularité de la notation numérique employée pour écrire les nombres qui figurent dans le texte ci-dessus. Ces nombres sont exprimés en partie par les lettres numérales et en partie par les chiffres indiens. On s'explique toutefois cette bizarrerie apparente. Ainsi que je l'ai montré dans un autre travail[2], les astronomes arabes ne se sont pas servis des chiffres indiens dans les tables et dans les calculs où ils employaient les parties sexagésimales; mais ils leur ont préféré les lettres de l'alphabet numéral. Il paraît qu'ils trouvaient à ces dernières, pour cet usage, l'avantage d'une plus grande brièveté. C'est conformément à cette coutume que les fractions sexagésimales sont exprimées par les lettres numérales dans le manuscrit de M. Scheffer. Mais pour la partie entière de ces nombres, ce manuscrit paraît prouver qu'on a commencé à exprimer les entiers par les chiffres indiens avec valeur de position.

[1] Voy. *Aperçu historique sur l'origine et le développement des méthodes en géométrie.* Bruxelles, 1837, in-4°, p. 491. Comparer *Ayeen Akbery, or the Institutes of the Emperor Akber,* translated from the original Persian by Francis Gladwin, in two volumes. London, 1800, vol. II, p. 347.

[2] *Sur l'introduction de l'arithmétique indienne en Occident et sur deux documents importants publiés par le prince Don Balthasar Boncompagni, et relatifs à ce point de l'histoire des sciences.* Rome, 1859, p. 54.

une fois qu'on s'était bien familiarisé avec cette dernière notation; c'est probablement parce que la partie entière des nombres pouvait s'élever à une grandeur quelconque, tandis que la notation sexagésimale alphabétique n'employait proprement aucun nombre supérieur à 59. Il est vrai qu'on savait exprimer, au moyen des lettres, des nombres plus grands, et même aussi grands qu'on voulait, soit en employant un plus grand nombre de lettres numérales, comme on le faisait, par exemple, pour les arcs qui embrassent toute la circonférence, tels que les rectascensions et les longitudes, où l'on se servait des lettres numérales jusqu'à 300 (ش), soit en créant des unités nouvelles pour les puissances ascendantes de soixante, des sexagènes. Mais ce dernier moyen permettait moins bien de saisir d'un seul coup d'œil la grandeur absolue de la partie entière, et l'on peut croire que c'est pour cette raison qu'on l'a remplacé plus tard par la notation indienne.

Les astronomes arabes, dans leur notation sexagésimale littérale, ne ponctuaient habituellement que le *noûn*, parce que cela suffisait pour éviter la confusion, les autres des quatorze lettres employées étant distinguées les unes des autres, soit par leur forme, soit par la place qu'elles devaient occuper. Cette particularité est observée aussi dans le manuscrit de M. Scheffer; mais pour l'impression j'ai pensé qu'il valait mieux rendre aux lettres numérales leurs points diacritiques.

FIN.